Augusto Beléndez Vázquez
Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal
Universidad de Alicante (2017)

1. CINEMÁTICA PLANA DEL SÓLIDO RÍGIDO

1. Introducción

2. Traslación. Movimiento plano. Rotación en torno a un eje fijo

3. Movimiento plano general. Velocidades absoluta y relativa

4. Centro instantáneo de rotación en el movimiento plano

5. Aceleraciones absoluta y relativa en el movimiento plano

6. Movimiento plano relativo a ejes en rotación. Aceleración de Coriolis

1. Introducción

En un **cuerpo rígido**, la separación entre dos puntos cualesquiera es fija e independiente del tiempo. Si las distancias entre dos puntos cualesquiera son fijas, también lo serán los ángulos determinados por toda tripleta de puntos A, B y C (Figura 1).

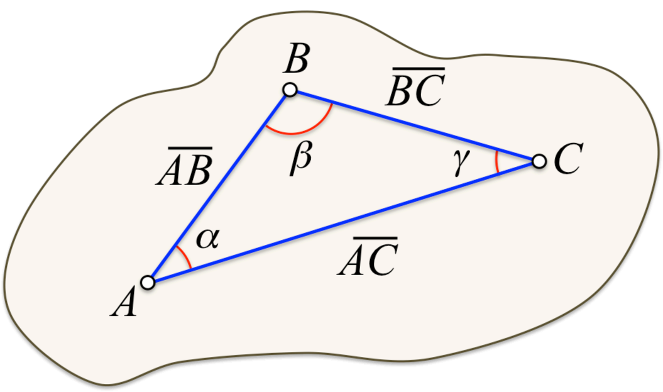

Figura 1

En la **cinemática de la partícula**, para describir completamente el movimiento, basta con conocer en cada instante su situación, es decir, las coordenadas del unto donde se encuentra la partícula. Sin embargo, en la **cinemática del sólido rígido**, la descripción completa de su movimiento exige que se den la posición y la orientación del cuerpo. Es este caso intervienen magnitudes lineales como angulares.

Existen cinco tipos generales de movimiento de un sólido rígido: traslación, rotación alrededor de un eje fijo, movimiento plano general, rotación en torno a un punto fijo y movimiento general.

(a) Traslación

La orientación de todo segmento rectilíneo del sólido rígido se mantiene constante durante el movimiento. Todos los puntos del cuerpo rígido se mueven a lo largo de trayectorias paralelas. Si estas trayectorias son líneas rectas es una **traslación rectilínea**; si son líneas cuervas, una **traslación curvilínea** (Figura 2).

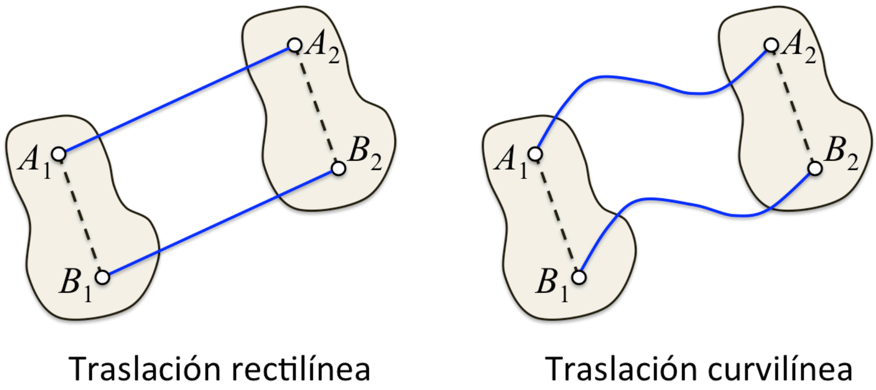

Figura 2

(b) Rotación alrededor de un eje fijo

Los puntos del sólido se mueven en planos paralelos a lo largo de círculos centrados sobre el mismo **eje fijo**. Si este eje, llamado **eje de rotación**, intersecta al cuerpo, los puntos de dicho eje tienen velocidad cero y aceleración cero (Figura 3).

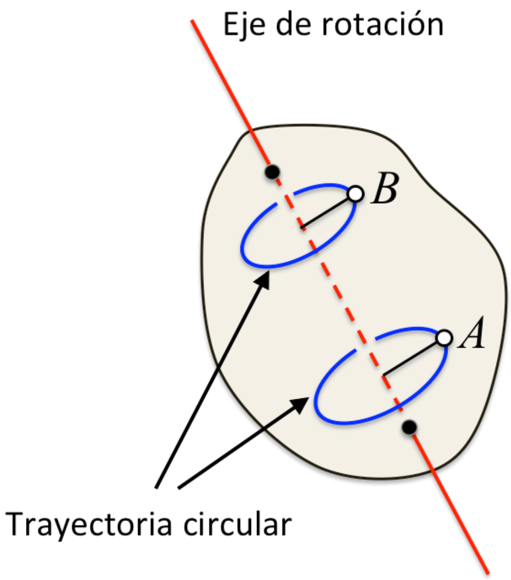

Figura 3

(c) Movimiento plano general

En un movimiento plano cada punto del sólido permanece en un plano. Como ejemplos se pueden mencionar la **traslación coplanaria** y la **rotación en torno a un eje fijo**. Los demás tipos de movimientos planos se denominan **movimiento plano general** (Figura 4).

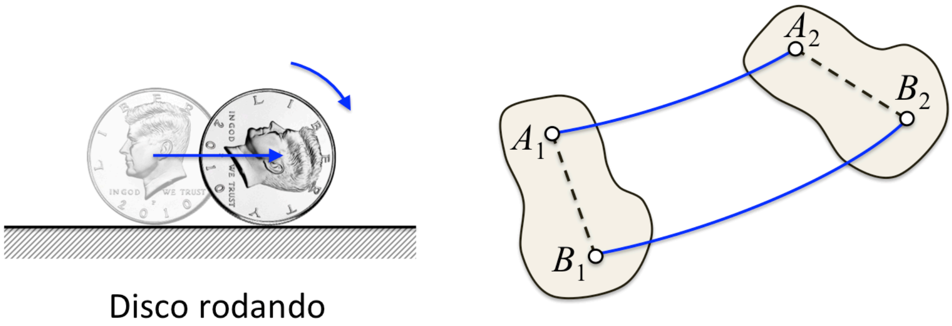

Figura 4

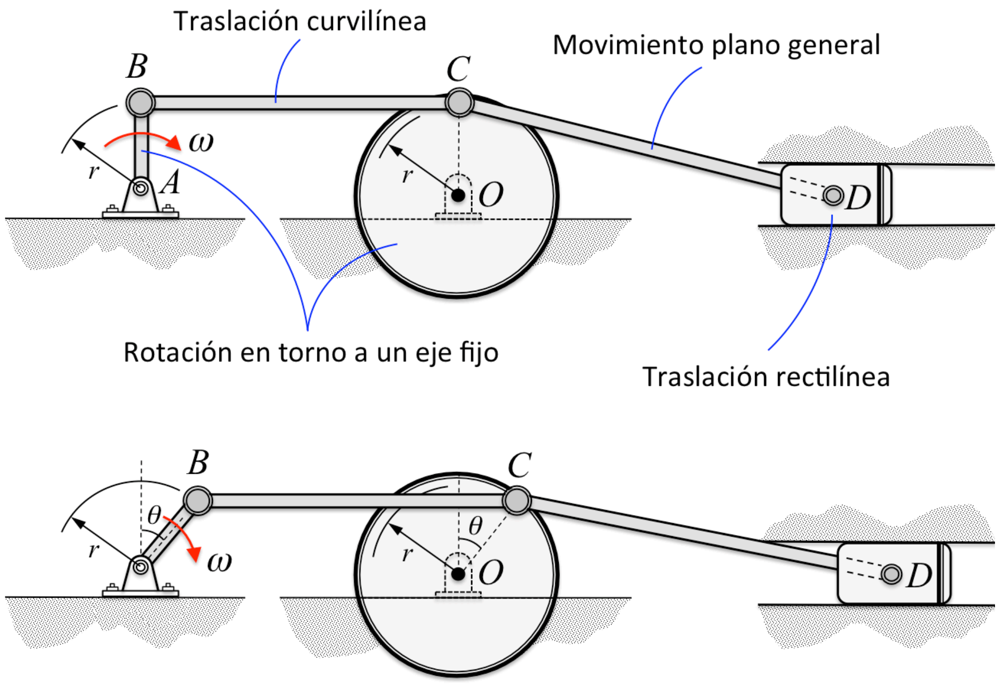

Figura 5

(d) Rotación en torno a un punto fijo

Se trata de un movimiento tridimensional en el que un punto de sólido permanece fijo (Figura 6).

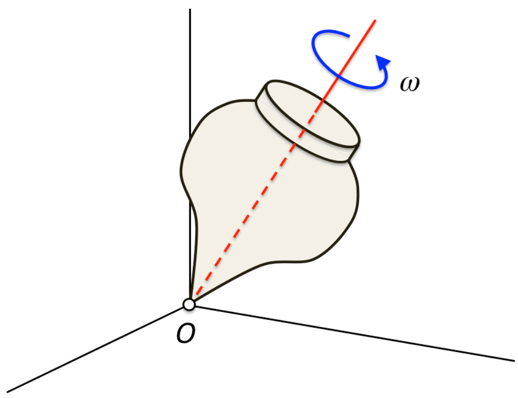

Figura 6

(e) Movimiento general

Cualquier movimiento del sólido rígido que no entra en las categorías anteriores se denomina **movimiento general**.

2. Traslación, movimiento plano, rotación en torno a un eje fijo

2.1.- Traslación

La orientación de todo segmento rectilíneo se mantiene constante. Las relaciones entre los vectores de posición, las velocidades y las aceleraciones de dos puntos cualesquiera A y B del sólido son las siguientes

$$\vec{\mathbf{r}}_B = \vec{\mathbf{r}}_A + \mathbf{AB} \quad (1)$$

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A \qquad \left(\frac{d\mathbf{AB}}{dt} = 0\right) \quad (2)$$

$$\vec{\mathbf{a}}_B = \vec{\mathbf{a}}_A \quad (3)$$

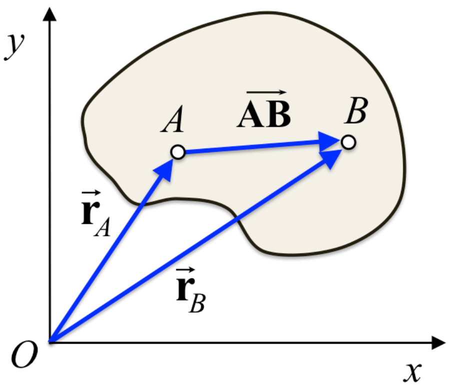

Figura 7

2.3. Movimiento plano

Cada punto del cuerpo permanece en un plano, por lo que bastará considerar sólo el movimiento en un solo plano del sólido. Normalmente se considera el plano que contiene al centro de masa del sólido rígido que se denomina **plano del movimiento**.

Como los puntos no pueden salir del plano del movimiento, la posición de un sólido rígido en movimiento plano quedará determinada al dar la **posición de un punto** y la **orientación de una recta** en el plano del movimiento.

La orientación de la recta puede darse mediante el ángulo θ que forma dicha recta con una dirección fija o dando la posición de dos puntos cualesquiera de la recta A y B (Figura 8).

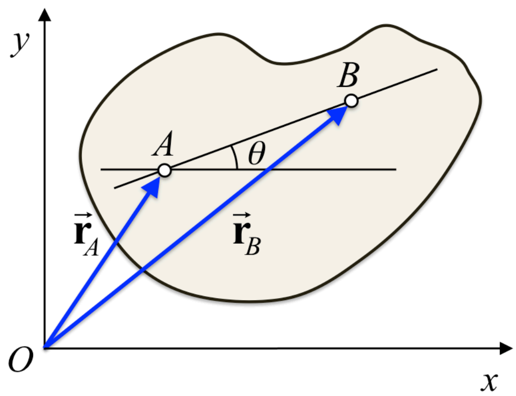

Figura 8

La **velocidad angular** ω_{AB} y la **aceleración angular** α_{AB} del sólido vienen dadas mediante las ecuaciones:

$$\omega_{AB} = \frac{d\theta_{AB}}{dt} = \dot{\theta}_{AB} \tag{4}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{d\omega_{AB}}{dt} = \dot{\omega}_{AB} = \ddot{\theta}_{AB} \tag{5}$$

La velocidad angular y la aceleración angular son las mismas para todas las rectas del sólido.

El estudio del movimiento plano de un sólido rígido es importante en el diseño de engranajes, levas y mecanismos utilizados en muchas operaciones mecánicas.

2.4. Rotación alrededor de un eje fijo

El movimiento plano de un sólido rígido se puede determinar a partir del movimiento de un punto y el movimiento de una recta, ambos en el plano del movimiento. Sin embargo, en la **rotación alrededor de un eje fijo**, el punto del eje permanecerá siempre en él, por lo que el movimiento de todo el cuerpo se podrá determinar a partir del movimiento de una recta. Los puntos que no estén en el eje fijo recorrerán trayectorias circulares centradas en dicho eje (Figura 9) y la velocidad **v** de un punto *P* cuyo vector de posición es **r** podrá determinarse a partir de la velocidad angular **ω** mediante la relación:

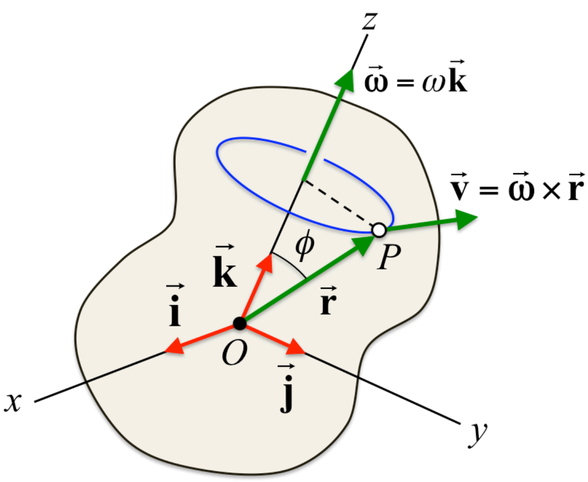

Figura 9

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}} \tag{6}$$

Si consideramos el plano del movimiento podemos fácilmente calcular la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ y la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ del sólido rígido (Figura 10).

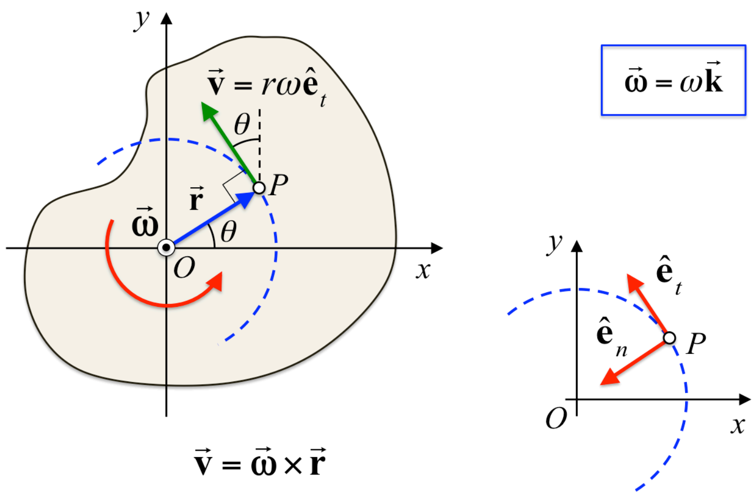

Figura 10

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\boldsymbol{\omega}}=\omega\vec{\mathbf{k}}\\ \vec{\boldsymbol{\alpha}}=\alpha\vec{\mathbf{k}}\end{array}\right\} \tag{7}$$

<u>Velocidad</u>:

$$\vec{\mathbf{v}}=\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{r}} \tag{8}$$

<u>Aceleración</u>:

$$\vec{\mathbf{a}}=\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{r}})=\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}\times\vec{\mathbf{r}}+\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \tag{9}$$

$$\vec{\mathbf{a}}=\vec{\boldsymbol{\alpha}}\times\vec{\mathbf{r}}+\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{v}} \tag{10}$$

$$\vec{\mathbf{a}}=\vec{\boldsymbol{\alpha}}\times\vec{\mathbf{r}}+\vec{\boldsymbol{\omega}}\times(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{r}}) \tag{11}$$

Aceleración tangencial:

$$\vec{\mathbf{a}}_t=\vec{\boldsymbol{\alpha}}\times\vec{\mathbf{r}} \tag{12}$$

Aceleración normal:

$$\vec{\mathbf{a}}_n=\vec{\boldsymbol{\omega}}\times(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{r}}) \tag{13}$$

Utilizando los vectores unitarios tangente y normal a la trayectoria (Figura 10) se puede escribir la velocidad en la forma:

$$\vec{\mathbf{v}}=v\hat{\mathbf{e}}_t \tag{14}$$

Y las aceleraciones tangencial y normal serán (Figura 11):

$$\vec{\mathbf{a}}_t=a_t\hat{\mathbf{e}}_t=\alpha r\hat{\mathbf{e}}_t \tag{15}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_n=a_n\hat{\mathbf{e}}_n=\omega^2 r\hat{\mathbf{e}}_n \tag{16}$$

En el movimiento plano se tiene:

$$\vec{\mathbf{a}}_n=\vec{\boldsymbol{\omega}}\times(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{r}})=-\omega^2\vec{\mathbf{r}} \tag{17}$$

La aceleración tangencial $\vec{\mathbf{a}}_t$ tiene en cuenta el cambio en el módulo del vector velocidad, mientras que la aceleración normal $\vec{\mathbf{a}}_n$ tiene en cuenta el cambio en la dirección del vector velocidad.

Se cumple:

$$\vec{\mathbf{a}}=\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}=\frac{d}{dt}(v\hat{\mathbf{e}}_t)=\frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{e}}_t+v\frac{d\hat{\mathbf{e}}_t}{dt}=\frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{e}}_t+v\left(\frac{v}{r}\hat{\mathbf{e}}_n\right)=\frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{e}}_t+\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{e}}_n=\vec{\mathbf{a}}_t+\vec{\mathbf{a}}_n \tag{18}$$

donde:

$$\vec{\mathbf{a}}_t=\frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{e}}_t=\alpha r\hat{\mathbf{e}}_t \tag{19}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_n=\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{e}}_n=\omega^2 r\hat{\mathbf{e}}_n \tag{20}$$

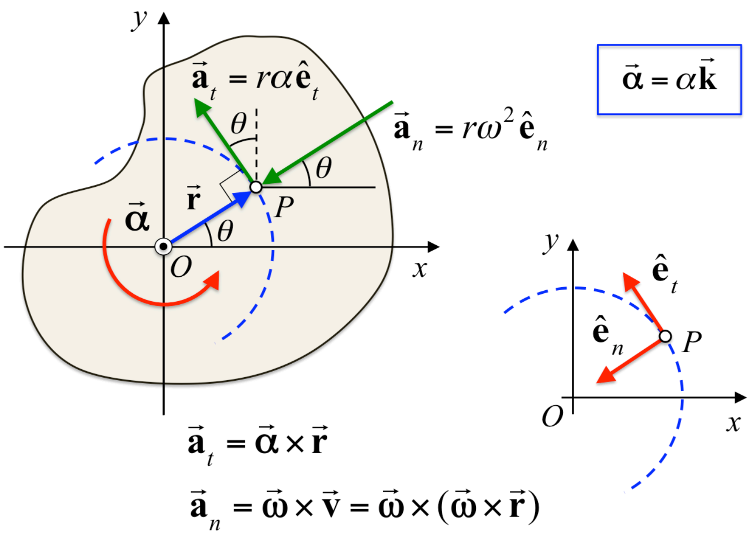

Figura 11

3. Movimiento plano general. velocidades absoluta y relativa

> "Un movimiento plano general siempre puede considerarse como la suma de una traslación y una rotación".

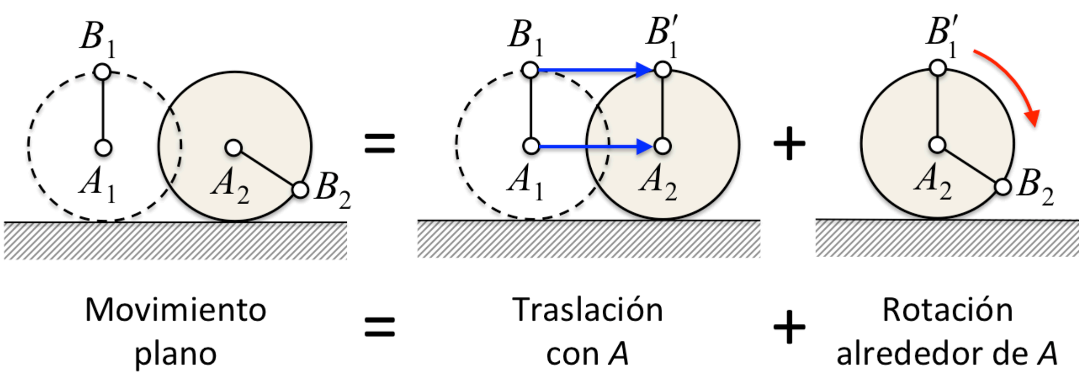

Figura 12

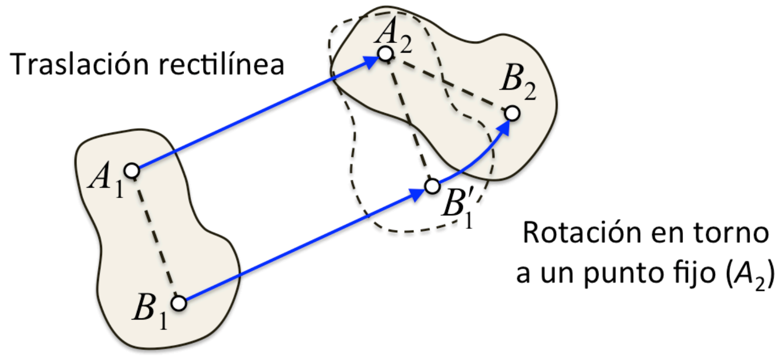

Figura 13

Consideremos un sólido con movimiento plano. Vamos a encontrar la relación que existe entre las velocidades de los puntos A y B cualesquiera del sólido. Teniendo en cuenta que $|\mathbf{AB}| =$ constante, podemos escribir (Figura 14):

$$\vec{\mathbf{r}}_B = \vec{\mathbf{r}}_A + \mathbf{AB} \tag{21}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_B}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \tag{22}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_A = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_A}{dt} \qquad \vec{\mathbf{v}}_B = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_B}{dt} \tag{23}$$

$\vec{\mathbf{v}}_A$ y $\vec{\mathbf{v}}_B$ son las **velocidades absolutas** de los puntos A y B del sólido, respectivamente.

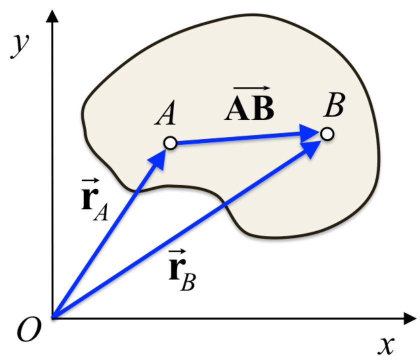

Figura 14

AB es un vector de módulo constante pero su dirección cambia, entonces su derivada respecto al tiempo $d\mathbf{AB}/dt$ es perpendicular a **AB**:

$$|\mathbf{AB}| = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AB}) = \mathbf{AB}\cdot\frac{d\mathbf{AB}}{dt} + \frac{d\mathbf{AB}}{dt}\cdot\mathbf{AB} = 2\mathbf{AB}\cdot\frac{d\mathbf{AB}}{dt} = 0 \tag{24}$$

$$|\mathbf{AB}| = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \perp \mathbf{AB} \tag{25}$$

Se cumple:

$$\frac{d\mathbf{AB}}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{AB} \tag{26}$$

que es la **velocidad relativa** $\vec{\mathbf{v}}_{B/A}$ del punto B respecto al punto A (rotación), $\vec{\mathbf{v}}_{B/A} = \vec{\omega} \times \mathbf{AB}$. Teniendo en cuenta las ecuaciones (22), (23) y (26) podemos escribir (Figura 15):

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\omega} \times \mathbf{AB} \tag{27}$$

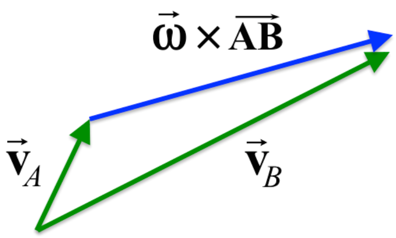

Figura 15

En la ecuación (27) $\vec{\mathbf{v}}_B$ tiene en cuenta la traslación y $\vec{\omega} \times \mathbf{AB}$ la rotación del sólido (Figura 16).

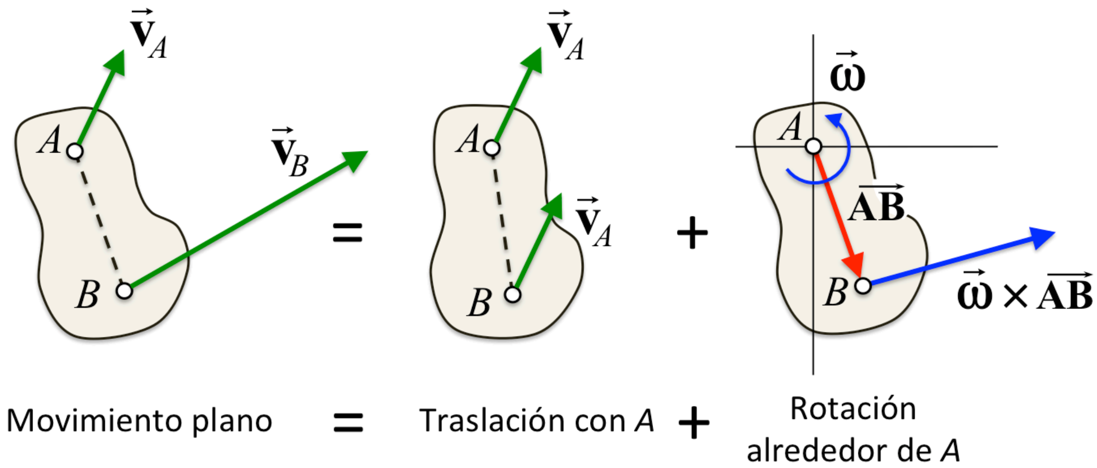

Figura 16

Si escribimos:

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \mathbf{AB} \tag{28}$$

despejando $\vec{\mathbf{v}}_A$ se obtiene:

$$\vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\mathbf{v}}_B - \vec{\omega}_{AB} \times \mathbf{AB} = \vec{\mathbf{v}}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \mathbf{BA} \tag{29}$$

Pero $\vec{\mathbf{v}}_A$ sería:

$$\vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\mathbf{v}}_B + \vec{\boldsymbol{\omega}}_{BA} \times \mathbf{BA} \tag{30}$$

luego:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{AB} = \vec{\boldsymbol{\omega}}_{BA} \tag{31}$$

Es decir, la velocidad angular del cuerpo en su rotación alrededor del punto B es la misma que en su rotación en torno al punto A.

> “La velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ de un sólido rígido en movimiento plano es independiente del punto de referencia”.

4. Centro instantáneo de rotación en el movimiento plano

En el movimiento plano general de un sólido rígido no hay ningún punto que se halle siempre en reposo. Sin embargo, en cada instante, es siempre posible hallar un punto del cuerpo (o de su extensión) que tenga velocidad nula. Este punto recibe el nombre de **centro instantáneo de rotación (CIR)**.

En el movimiento plano general de un sólido rígido el centro instantáneo de rotación (CIR) no es un punto fijo. Si en un instante determinado el punto I es el centro instantáneo de rotación, entonces su velocidad es nula, $\vec{\mathbf{v}}_I = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\mathbf{v}}_I + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{IA} \\ \vec{\mathbf{v}}_I = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{IA} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}}_A \perp \mathbf{IA} \tag{32}$$

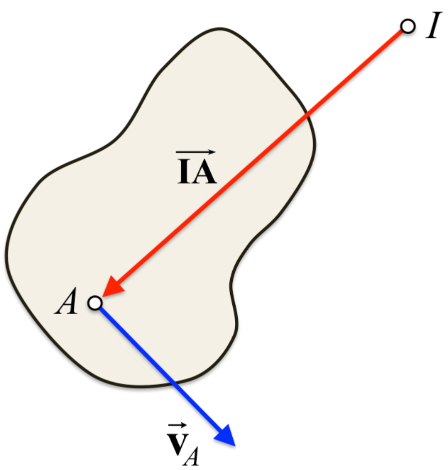

Figura 17

Por tanto, la recta que une el CIR con un punto cualquiera A del sólido es perpendicular a la velocidad $\vec{\mathbf{v}}_A$ de dicho punto.

Podemos escribir:

$$r = \frac{v_A}{\omega} \qquad r = |\mathbf{IA}| \tag{33}$$

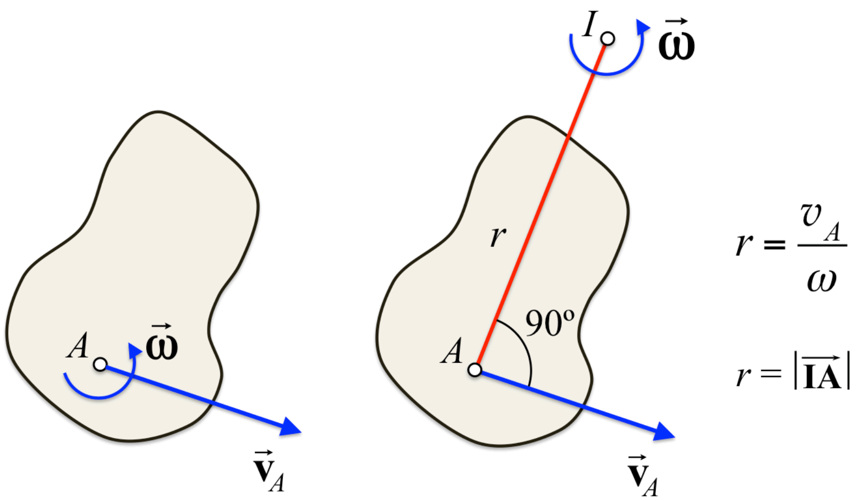

Figura 18

Si conocemos las velocidades $\vec{\mathbf{v}}_A$ y $\vec{\mathbf{v}}_B$ de dos puntos del sólido, el CIR estará en la intersección de sus rectas perpendiculares a $\vec{\mathbf{v}}_A$ y $\vec{\mathbf{v}}_B$ en A y B.

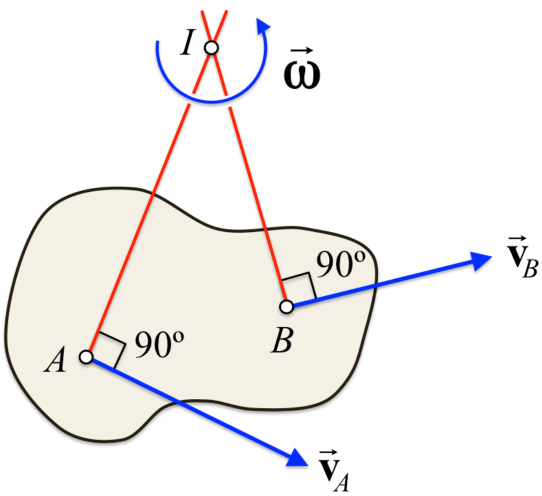

Figura 19

En todos los puntos del sólido que pertenecen a la recta que une el centro instantáneo de rotación I con el punto A, las velocidades son perpendiculares al vector **IA**:

$$\omega = \frac{v_A}{IA} \qquad \omega = \frac{v_B}{IB} \qquad \omega = \frac{v_C}{IC} \tag{34}$$

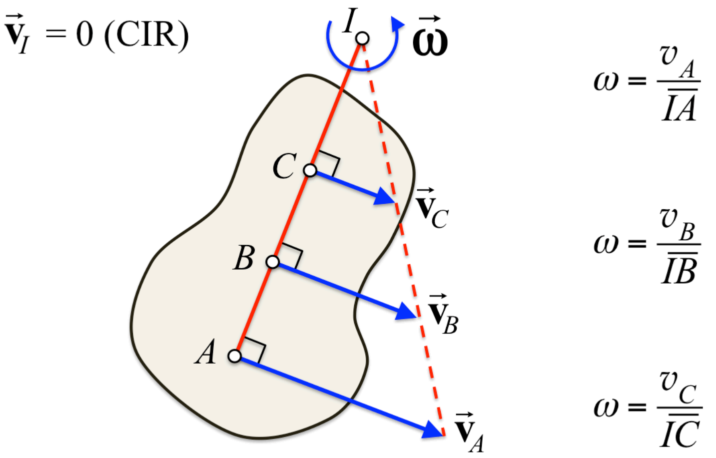

Figura 20

Consideremos dos puntos del sólido A y B cuyas velocidades $\vec{\mathbf{v}}_A$ y $\vec{\mathbf{v}}_B$, respectivamente, son conocidas y que el punto I es el CIR. Si las velocidades $\vec{\mathbf{v}}_A$ y $\vec{\mathbf{v}}_B$ son **paralelas**, el CIR se encuentra en la recta que une los puntos A y B. Como la velocidad relativa es ωr, el CIR se hallará a una distancia $IA = v_A / \omega$ del punto A y a una distancia $IB = v_B / \omega$ del punto B; su situación podrá hallarse por semejanza de triángulos.

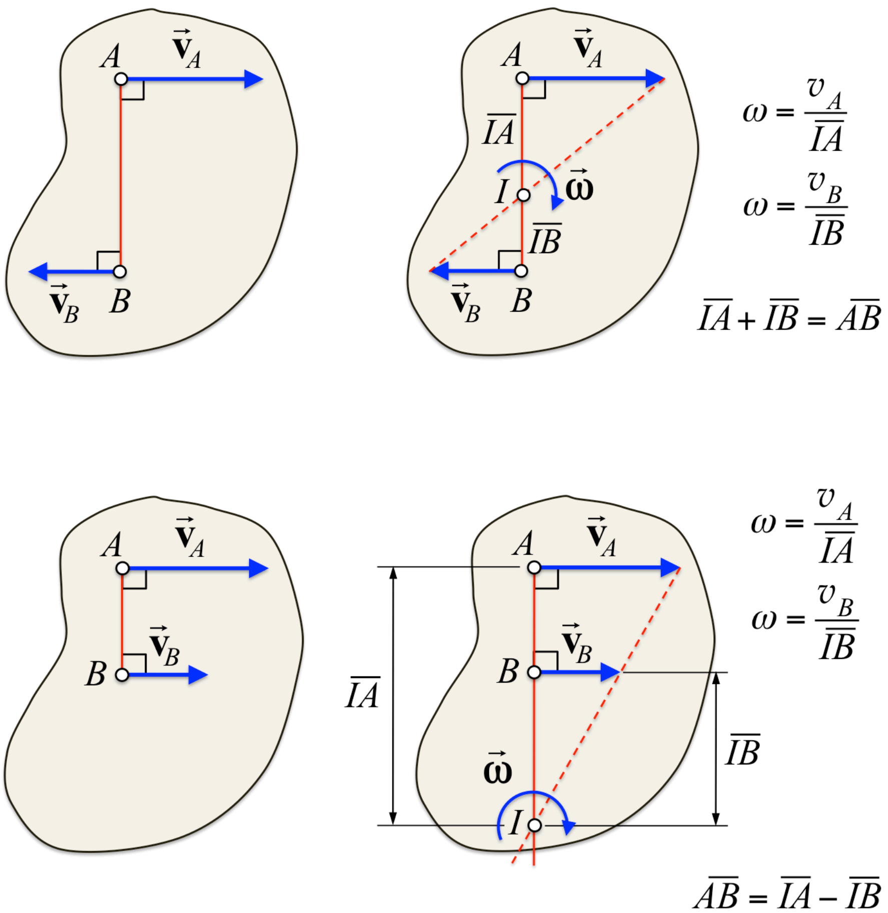

Figura 21

Si se conoce la posición I del CIR, la velocidad $\vec{\mathbf{v}}_A$ de cualquier otro punto A en ese instante es:

$$\left.\begin{array}{c}\vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\mathbf{v}}_I + \vec{\omega} \times \mathbf{IA} \\ \vec{\mathbf{v}}_I = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\omega} \times \mathbf{IA} \tag{35}$$

que corresponde una rotación alrededor del CIR.

Cuando dos o más cuerpos están unidos por un pasador, se puede hallar un CIR para cada cuerpo. Como la velocidad del punto que une los dos cuerpos es la misma para cada uno de ellos, los CIR de uno y otro deberán estar sobre la recta que pase por el punto común de ambos cuerpos.

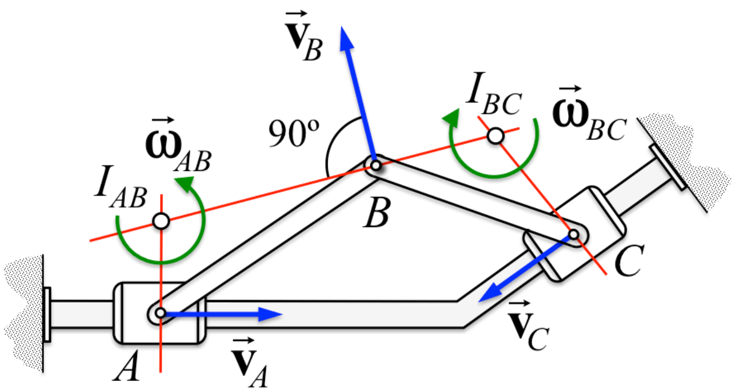

Figura 22

El CIR de una rueda que gira sobre una superficie se encuentra en el punto de contacto de la rueda con la superficie.

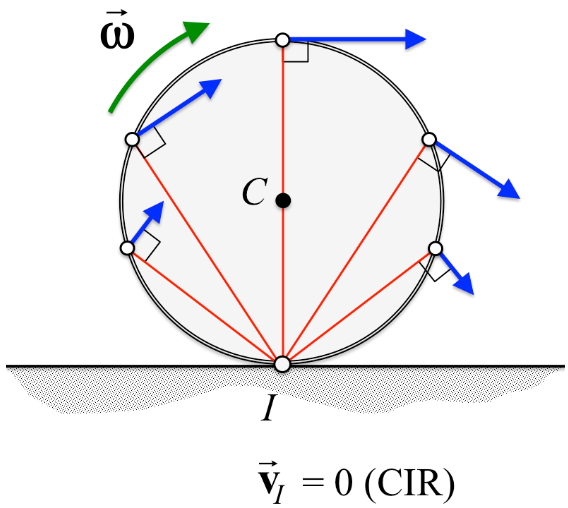

Figura 23

> "La velocidad de un punto en el sólido siempre es perpendicular al vector de posición relativa dirigido desde el CIR hacia el punto".

El lugar geométrico de los puntos que definen la ubicación del CIR durante el movimiento del sólido se llama **centroda** y, por tanto, cada punto de la centroda actúa como el CIR del sólido sólo por un instante.

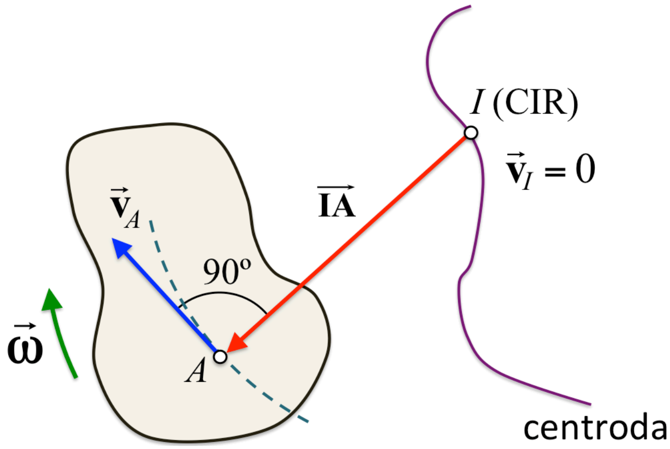

Figura 24

5. Aceleraciones absoluta y relativa en el movimiento plano

Las relaciones entre las velocidades absolutas $\vec{\mathbf{v}}_A$ y $\vec{\mathbf{v}}_B$ de dos puntos A y B, respectivamente, de un sólido rígido es:

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\omega} \times \mathbf{AB} \tag{36}$$

Derivando respecto al tiempo t se obtiene la relación entre sus aceleraciones:

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}_B}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \tag{37}$$

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{\mathbf{a}}_B = \dfrac{d\vec{\mathbf{v}}_B}{dt} \\ \vec{\mathbf{a}}_A = \dfrac{d\vec{\mathbf{v}}_A}{dt} \\ \vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \\ \dfrac{d\mathbf{AB}}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{AB} \end{array}\right\} \tag{38}$$

donde $\vec{\alpha}$ es la aceleración angular, la aceleración del punto B se puede escribir como:

$$\vec{\mathbf{a}}_B = \vec{\mathbf{a}}_A + \vec{\alpha} \times \mathbf{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{AB}) \tag{39}$$

En esta ecuación se tiene:

$\vec{\mathbf{a}}_A =$ aceleración absoluta de A

$\vec{\mathbf{a}}_B =$ aceleración absoluta de B

$\vec{\alpha}\times\mathbf{AB}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\mathbf{AB}) =$ aceleración del punto B medida relativa al punto A

La aceleración relativa de B (medida respecto a A), $\vec{\mathbf{a}}_{B/A}$, tiene dos componentes:

$$\vec{\mathbf{a}}_{B/A} = \underbrace{\vec{\alpha}\times\mathbf{AB}}_{\substack{\text{componente}\\ \text{tangencial}\\ \left(\vec{\mathbf{a}}_{B/A}\right)_t}} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\mathbf{AB})}_{\substack{\text{componente}\\ \text{normal}\\ \left(\vec{\mathbf{a}}_{B/A}\right)_n}} \tag{40}$$

$\vec{\alpha}\times\mathbf{AB}$ es perpendicular a $\mathbf{AB}$.
En el movimiento plano se cumple:

$$\left(\vec{\mathbf{a}}_{B/A}\right)_n = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\mathbf{AB}) = -\omega^2\mathbf{AB} \tag{41}$$

que es un vector paralelo a $\mathbf{AB}$ y de sentido contrario.

Aceleración relativa de B:

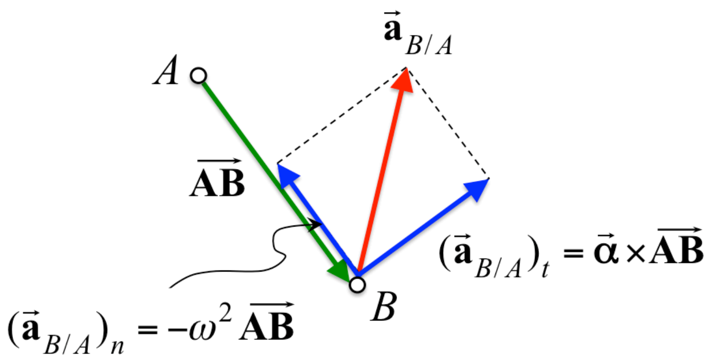

Figura 25

Aceleración absoluta de B:

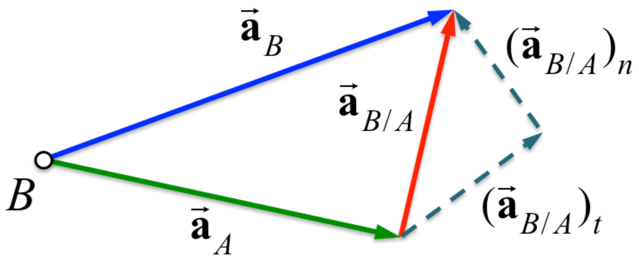

Figura 26

Disco que rueda sin deslizar sobre una superficie

Vamos a analizar a continuación la velocidad y la aceleración del centro instantáneo de rotación (I) de un **disco que rueda sin deslizar sobre una superficie**. El CIR es el punto I de contacto entre el disco y el suelo. Como el punto I pertenece al disco pero también pertenece al suelo, y **el suelo no se mueve**. La velocidad de I es cero (momentáneamente):

$$\vec{\mathbf{v}}_I = 0 \qquad I : \mathrm{CIR} \tag{42}$$

Consideremos un disco de radio r que tiene una velocidad angular $\vec{\omega}$ y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ y que rueda sin deslizar. Se I el punto de contacto entre el disco y el plano horizontal sobre el que rueda el disco.

El disco experimenta un **movimiento plano general** puesto que **se traslada y gira al mismo tiempo**.

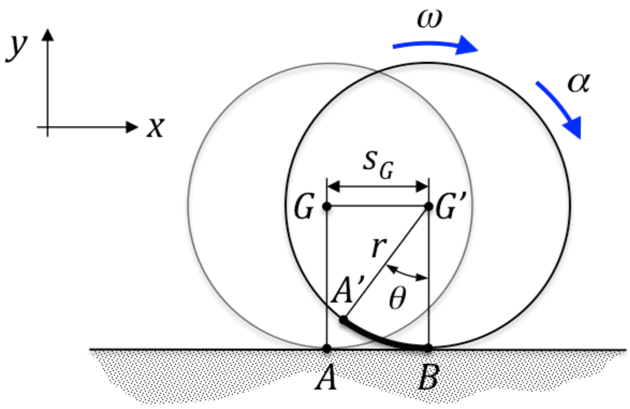

Figura 27

El centro G del disco se mueve en **línea recta** hacia la derecha de G a G', a medida que el disco rueda. La distancia s_G de G a G' será igual al arco $A'B$ en su borde, el cual está en contacto con el suelo de A a B. El movimiento requiere que la línea radial GA gire un ángulo θ a la posición $G'A'$. Como el arco $A'B = r\theta$, entonces G recorre una distancia s_G de G a G' cuyo valor es:

$$s_G = GG' = r\theta \tag{43}$$

<u>Velocidad de G:</u>

$$v_G = \frac{ds_G}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \tag{44}$$

<u>Aceleración de G:</u>

$$a_G = \frac{dv_G}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \tag{45}$$

Como G describe un **movimiento rectilíneo** en la dirección del eje x, se puede escribir:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\mathbf{v}}_G = v_G\vec{\mathbf{i}} = r\omega\vec{\mathbf{i}}\\ \vec{\mathbf{a}}_G = a_G\vec{\mathbf{i}} = r\alpha\vec{\mathbf{i}}\end{array}\right\} \tag{46}$$

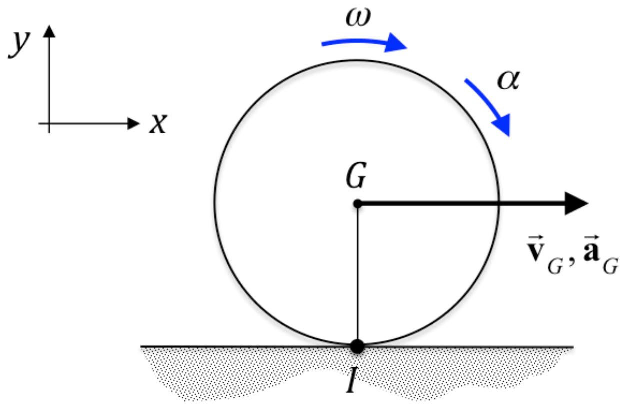

Figura 28

Es importante tener en cuenta que estas relaciones son válidas sólo si **el disco rueda sin deslizar**.

Vamos a comprobar que el punto I de contacto entre el disco y la superficie horizontal tiene velocidad nula ($\vec{\mathbf{v}}_I = 0$). También vamos a comprobar que $\vec{\mathbf{a}}_I \neq 0$ y calcular su valor. De la relación entre velocidades de dos puntos de un sólido tenemos:

$$\vec{\mathbf{v}}_I = \vec{\mathbf{v}}_G + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{GI} \tag{47}$$

De la Figura 29 se obtiene:

$$\left.\begin{array}{c}\vec{\mathbf{v}}_G = v_G\vec{\mathbf{i}} = r\omega\vec{\mathbf{i}}\\ \mathbf{GI} = -r\vec{\mathbf{j}}\\ \vec{\boldsymbol{\omega}} = -\omega\vec{\mathbf{k}} \;\; (\omega > 0)\end{array}\right\} \tag{48}$$

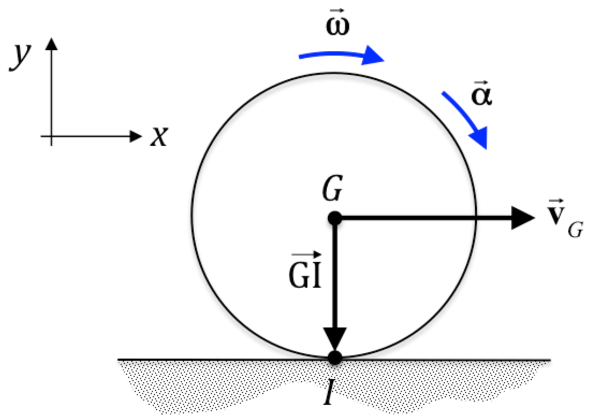

Figura 29

Sustituyendo los valores de la ecuación (48) en la ecuación (47), se obtiene:

$$\vec{\mathbf{v}}_I = \vec{\mathbf{v}}_G + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{GI} = r\omega\vec{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & -r & 0 \end{vmatrix} = r\omega\vec{\mathbf{i}} - r\omega\vec{\mathbf{i}} = \vec{0} \tag{49}$$

Así pues:

$$\vec{\mathbf{v}}_I = \vec{0} \qquad (\text{CIR}) \tag{50}$$

Para calcular la **aceleración** $\vec{\mathbf{a}}_I$ del CIR hacemos uso de la ecuación que relaciona las aceleraciones de dos puntos de un mismo sólido y la aplicamos a los puntos *I* y *G*:

$$\vec{\mathbf{a}}_I = \vec{\mathbf{a}}_G + \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{GI} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AB}) = \vec{\mathbf{a}}_G + \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{GI} - \omega^2 \mathbf{GI} \tag{51}$$

De la Figura 30 se obtiene:

$$\left.\begin{array}{c} \vec{\mathbf{a}}_G = a_G\vec{\mathbf{i}} = r\alpha\vec{\mathbf{i}} \\ \mathbf{GI} = -r\vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\boldsymbol{\alpha}} = -\alpha\vec{\mathbf{k}} \;\; (\alpha > 0) \end{array}\right\} \tag{52}$$

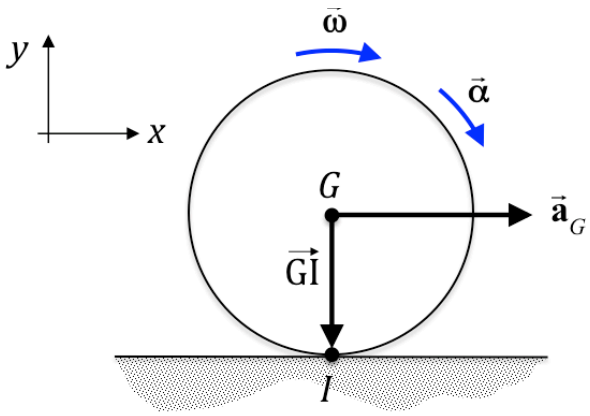

Figura 30

Sustituyendo los valores de la ecuación (52) en la ecuación (51), se obtiene:

$$\vec{\mathbf{a}}_I = \vec{\mathbf{a}}_G + \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{GI} - \omega^2\mathbf{GI} = r\alpha\vec{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -r & 0 \end{vmatrix} - \omega^2(-r\vec{\mathbf{j}}) = \tag{53}$$

$$= r\alpha\vec{\mathbf{i}} - r\alpha\vec{\mathbf{i}} + \omega^2 r\vec{\mathbf{j}} = \omega^2 r\vec{\mathbf{j}}$$

Así pues:

$$\vec{\mathbf{a}}_I = \omega^2 r \vec{\mathbf{j}} \tag{54}$$

que es perpendicular a la superficie de contacto en el punto I y, por tanto, perpendicular a la aceleración $\vec{\mathbf{a}}_G$.

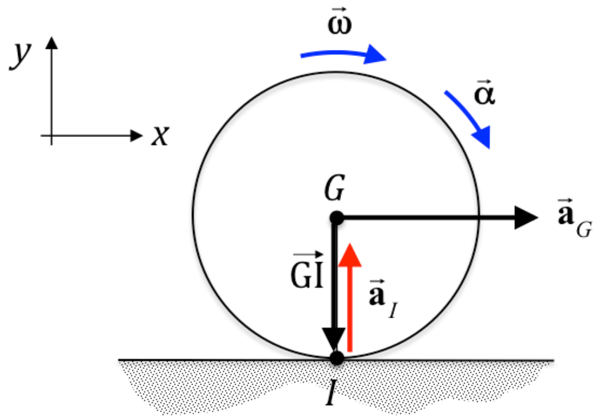

Figura 31

Teniendo en cuenta lo anterior se puede escribir:

$$\begin{array}{lll} G: & \vec{\mathbf{v}}_G = \vec{\omega} \times \mathbf{IG} & \vec{\mathbf{a}}_G = \vec{\alpha} \times \mathbf{IG} \\ I: & \vec{\mathbf{v}}_I = 0 & \vec{\mathbf{a}}_I = \omega^2 \mathbf{IG} = -\omega^2 \mathbf{GI} \end{array} \tag{55}$$

6. Movimiento relativo a ejes en rotación. Aceleraciones de Coriolis

Hasta ahora se ha descrito la posición, la velocidad y la aceleración de cada punto del sólido rígido utilizando un sistema de coordenadas fijo. La posición relativa, la aceleración relativa y la aceleración relativa también se han descrito utilizando el mismo sistema de coordenadas fijo.

Sin embargo, existe un tipo de problemas para los cuales conviene describir la posición o el movimiento de uno de los puntos del sólido rígido relativo a un sistema de coordenadas en rotación. Entre estos problemas se encuentran:

1. El movimiento se observa desde un sistema que está girando. Por ejemplo, la Tierra tiene un movimiento de rotación y los sistemas de coordenadas solidarios a la Tierra son sistemas de coordenadas en rotación. Este efecto no es despreciable cuando se describe el movimiento de cohetes o naves espaciales cuando se observan desde la Tierra en rotación.

2. Cuando los movimientos de dos puntos están relacionados de alguna manera pero no son iguales y no están en un mismo sólido rígido. Por ejemplo, algunos mecanismos están conectados por pasadores que se deslizan por ranuras. El movimiento relativo se especifica de manera conveniente dando el movimiento de traslación y rotación de la pieza que contiene la ranura, la forma de dicha ranura y la velocidad con que el pasador la recorre.

3. La solución de problemas de dinámica en los que interviene la rotación de cuerpos rígidos de forma irregular. Los momentos y productos de inercia dependen del sistema de coordenadas que se utilice para describirlos. Si los ejes están fijos, pero el cuerpo gira, sus momentos de inercia variarán a menos que el cuerpo presente ciertas simetrías. En cambio, si se deja que los ejes giren con el cuerpo, los momentos y productos de inercia serán constantes.

Al derivar para obtener la velocidad y la aceleración habrá que tener en cuenta la rotación del sistema de coordenadas.

Consideremos el ejemplo de la Figura 32. El punto A pertenece a un sólido rígido que gira con velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y con aceleración angular $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$. Supongamos que el movimiento, es decir, posición, velocidad y aceleración, del punto A pueda describirse fácilmente en el sistema de coordenadas fijo XY. Por otra parte, supongamos que el punto B se mueva de una manera prefijada relativa al sólido rígido giratorio –como un pasador que corra por una ranura–. Se considera un sistema de coordenadas xy solidario al sólido rígido y que gire con él.

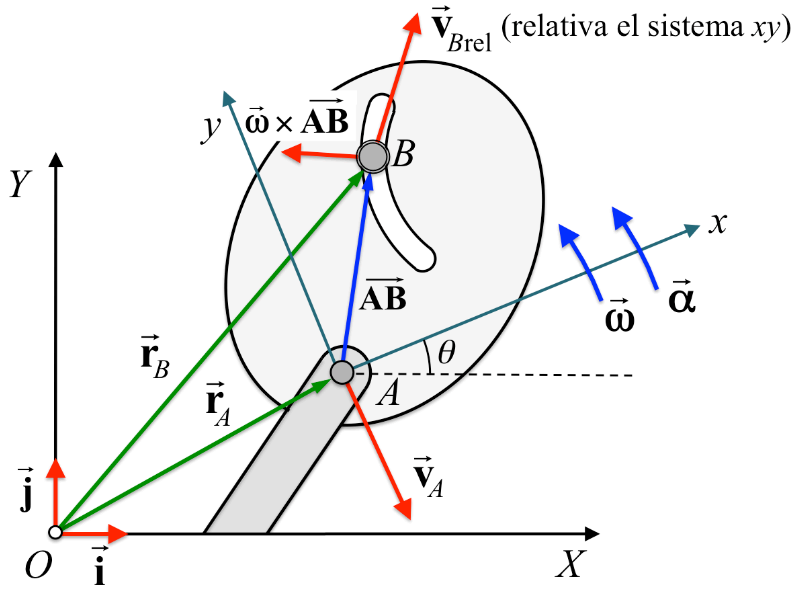

Figura 32

<u>Análisis del movimiento plano relativo por medio de ejes rotatorios</u>

<u>Posición (Figura 33):</u>

$$\vec{\mathbf{r}}_A = X_A\vec{\mathbf{i}} + Y_A\vec{\mathbf{j}} \qquad \text{sistema } XY \tag{56}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_B = X_B\vec{\mathbf{i}} + Y_B\vec{\mathbf{j}} \qquad \text{sistema } XY \tag{57}$$

$$\mathbf{AB} = x_B\hat{\mathbf{e}}_x + y_B\hat{\mathbf{e}}_y \qquad \text{sistema } xy \text{ (solidario con el cuerpo)} \tag{58}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_B = \vec{\mathbf{r}}_A + \mathbf{AB} = \vec{\mathbf{r}}_A + (x_B\hat{\mathbf{e}}_x + y_B\hat{\mathbf{e}}_y) \tag{59}$$

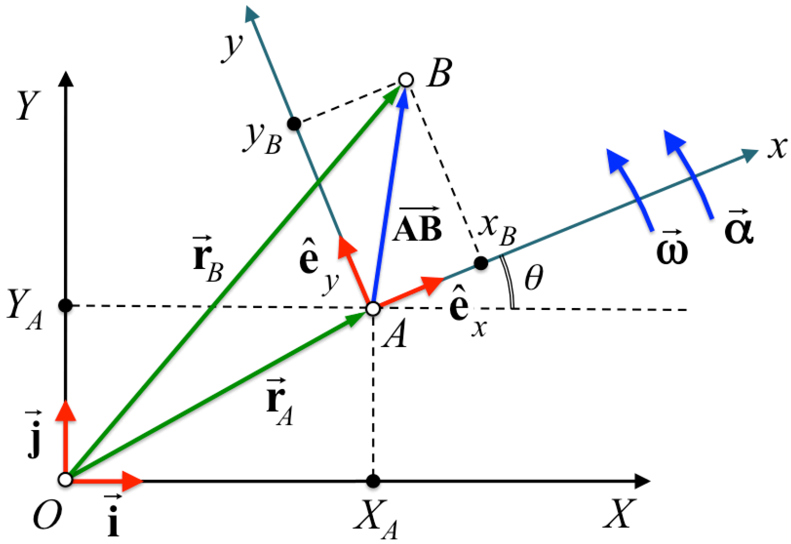

Figura 33

<u>Velocidad:</u>

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \frac{d\mathbf{AB}}{dt} = \vec{\mathbf{v}}_A + \frac{d}{dt}(x_B\hat{\mathbf{e}}_x + y_B\hat{\mathbf{e}}_y) =$$

$$= \vec{\mathbf{v}}_A + \frac{dx_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_x + x_B\frac{d\hat{\mathbf{e}}_x}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_y + y_B\frac{d\hat{\mathbf{e}}_y}{dt} = \tag{60}$$

$$= \vec{\mathbf{v}}_A + \frac{dx_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dy_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_y + x_B\frac{d\hat{\mathbf{e}}_x}{dt} + y_B\frac{d\hat{\mathbf{e}}_y}{dt}$$

Introducimos $\vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}}$ que es la velocidad de *B* relativa al sistema de coordenadas giratorio *xy* (medida en él):

$$\vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}} = \frac{dx_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dy_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_y = \dot{x}_B\hat{\mathbf{e}}_x + \dot{y}_B\hat{\mathbf{e}}_y \tag{61}$$

por lo que la velocidad $\vec{\mathbf{v}}_B$ se puede escribir:

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}} + x_B\frac{d\hat{\mathbf{e}}_x}{dt} + y_B\frac{d\hat{\mathbf{e}}_y}{dt} \tag{62}$$

Los vectores unitarios y varían con el tiempo al rotar el sistema de coordenadas *xy* con velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, por lo que podemos escribir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{e}}_x}{dt} &= \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}_x \\ \frac{d\hat{\mathbf{e}}_y}{dt} &= \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}_y \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

de modo que $\vec{\mathbf{v}}_B$ queda:

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}} + x_B(\vec{\omega}\times\hat{\mathbf{e}}_x) + y_B(\vec{\omega}\times\hat{\mathbf{e}}_y) = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}} + \vec{\omega}\times(x_B\hat{\mathbf{e}}_x + y_B\hat{\mathbf{e}}_y) \tag{64}$$

y como $\mathbf{AB} = x_B\hat{\mathbf{e}}_x + y_B\hat{\mathbf{e}}_y$ finalmente queda:

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\omega}\times\mathbf{AB} + \vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}} \tag{65}$$

Donde:

$\vec{\mathbf{v}}_B$	Velocidad de *B* medida respecto al sistema de referencia fijo *XY*
$\vec{\mathbf{v}}_A$	Velocidad de *A* (origen del sistema giratorio *xy*) medida respecto al sistema de referencia fijo *XY*
$\vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}}$	Velocidad de "*B* con respecto a *A*" medida respecto al sistema giratorio *xy*
$\vec{\omega}$	Velocidad angular del sistema de referencia *xy* medida respecto al sistema de referencia *XY*
AB	Posición de *B* con respecto a *A*, cuyas componentes se miden respecto al sistema rotatorio *xy*

Aceleración:

Derivamos respecto al tiempo la ecuación de la velocidad:

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\omega}\times\mathbf{AB} + \vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}} \tag{66}$$

y se obtiene:

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}_B}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\mathbf{AB} + \vec{\omega}\times\frac{d\mathbf{AB}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}}}{dt} \tag{67}$$

Recordamos que:

$$\vec{\mathbf{a}}_B = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_B}{dt} \qquad \vec{\mathbf{a}}_A = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_A}{dt} \qquad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{68}$$

$$\frac{d\mathbf{AB}}{dt} = \vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}} + \vec{\omega}\times\mathbf{AB} \tag{69}$$

Calculamos ahora:

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dy_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_y\right) = \\ = \frac{d^2x_B}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{d^2y_B}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{dx_B}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{e}}_x}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{e}}_y}{dt} \tag{70}$$

Ahora bien, recordemos que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{e}}_x}{dt} &= \vec{\omega}\times\hat{\mathbf{e}}_x \\ \frac{d\hat{\mathbf{e}}_y}{dt} &= \vec{\omega}\times\hat{\mathbf{e}}_y \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

y definamos $\vec{\mathbf{a}}_{B\text{rel}}$ como la aceleración de B con respecto a A, medida por un observador situado en el sistema de referencia rotatorio xy:

$$\vec{\mathbf{a}}_{B\text{rel}} = \frac{d^2x_B}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{d^2y_B}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_y = \ddot{x}_B\hat{\mathbf{e}}_x + \ddot{y}_B\hat{\mathbf{e}}_y \tag{72}$$

con lo que sustituyendo las ecuaciones (71) y (72) en la ecuación (70) se obtiene:

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}}}{dt} = \vec{\mathbf{a}}_{B\text{rel}} + \frac{dx_B}{dt}(\vec{\omega}\times\hat{\mathbf{e}}_x) + \frac{dy_B}{dt}(\vec{\omega}\times\hat{\mathbf{e}}_y) = \\ = \vec{\mathbf{a}}_{B\text{rel}} + \vec{\omega}\times\left(\frac{dx_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dy_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_y\right) = \vec{\mathbf{a}}_{B\text{rel}} + \vec{\omega}\times\vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}} \tag{73}$$

donde hemos tenido en cuenta la ecuación (61) que nos dice que:

$$\vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}} = \frac{dx_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dy_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_y \tag{74}$$

Sustituyendo las ecuaciones (68), (69) y (73) en la ecuación (67) se obtiene para $\vec{\mathbf{a}}_A$ la ecuación:

$$\vec{\mathbf{a}}_B = \vec{\mathbf{a}}_A + \vec{\alpha}\times\mathbf{AB} + \vec{\omega}\times\vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\mathbf{AB}) + \vec{\mathbf{a}}_{B\text{rel}} + \vec{\omega}\times\vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}} \tag{75}$$

que podemos escribir en la forma:

$$\vec{\mathbf{a}}_B = \vec{\mathbf{a}}_A + \vec{\alpha}\times\mathbf{AB} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\mathbf{AB}) + \vec{\mathbf{a}}_{B\text{rel}} + 2\vec{\omega}\times\vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}} \tag{76}$$

Donde:

$\vec{\mathbf{a}}_B$	Aceleración de *B* medida respecto al sistema de referencia fijo *XY*
$\vec{\mathbf{a}}_A$	Aceleración de *A* (origen del sistema giratorio *xy*) medida respecto al sistema de referencia fijo *XY*
$\vec{\omega}, \vec{\alpha}$	Velocidad y aceleración angulares del sistema de referencia móvil *xy* medidas respecto al sistema de referencia *XY*
$\vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}}, \vec{\mathbf{a}}_{B\text{rel}}$	Velocidad y aceleración de "*B* con respecto a *A*" medidas por un observador situado en el sistema de referencia rotatorio *xy*
$\vec{\omega}$	Velocidad angular del sistema de referencia *xy* mediada respecto al sistema de referencia *XY*
AB	Posición de *B* con respecto a *A*, cuyas componentes se miden respecto al sistema rotatorio *xy*

El significado físico de cada uno de los términos de la ecuación (76) es el siguiente:

<table>
<tr><td>$\vec{\mathbf{a}}_B$</td><td>Aceleración absoluta de B</td><td>Movimiento de B observado en el sistema fijo XY</td></tr>
<tr><td>$\vec{\mathbf{a}}_A$</td><td>Aceleración absoluta de A (origen del sistema giratorio xy)</td><td rowspan="3">Movimiento del sistema de referencia xy observado desde el sistema fijo XY</td></tr>
<tr><td>$\vec{\alpha} \times \mathbf{AB}$</td><td>El efecto de la aceleración angular provocado por la rotación del sistema xy</td></tr>
<tr><td>$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{AB})$</td><td>El efecto de velocidad angular por la rotación del sistema xy</td></tr>
<tr><td>$2\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}_{B\text{rel}}$
aceleración de Coriolis</td><td>El efecto combinado de B al moverse con respecto a las coordenadas xy y a la rotación del sistema xy</td><td>Movimiento interactuante</td></tr>
<tr><td>$\vec{\mathbf{a}}_{B\text{rel}}$</td><td>Aceleración de "B con respecto a A" con coordenadas xy</td><td>Movimiento de B observado desde el sistema móvil xy</td></tr>
</table>

BIBLIOGRAFÍA

W. F. Riley y L. D. Sturges, *Ingeniería Mecánica: Dinámica* (Reverté, 1996).

R. C. Hibbeler, *Ingeniería Mecánica: Dinámica* (Prentice Hall, 2010).

F. P. Beer, E. R. Johnston y P. J. Cornwell, *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Dinámica* (McGraw Hill, 2010).